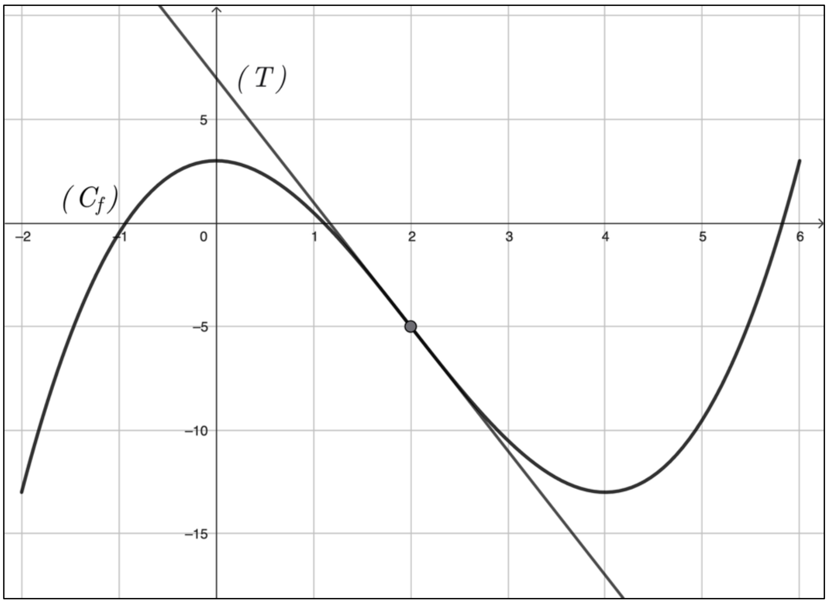
Correction de test d'apprentissage - La dérivation en première technologique

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 6]$.

Sa courbe représentative, notée (C_f), est donnée ci-dessous :



On considère la fonction f est définie sur l'intervalle $[-2; 6]$ par $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 3$.

La courbe (C_f) représente la fonction f.

On note (T) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.

On note f' la fonction dérivée de f.

1. a. L'équation de la courbe (C_f) est : $y = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 3$.

   b. On a : $f(0) = 0{,}5(0)^3 - 3(0)^2 + 3 = 3$.

   Et $f(4) = 0{,}5(4)^3 - 3(4)^2 + 3 = 32 - 48 + 3 = -13$.

   c. Tableau de variation de la fonction f à l'aide du graphique.

x	-2	0	4	6
Variations de f	↗		↘	↗

   d. L'ordonnée du point A d'abscisse 2 de la courbe (C_f) est $f(2)$ avec :

   $f(2) = 0{,}5(2)^3 - 3(2)^2 + 3 = 4 - 12 + 3 = -5$.

   Les coordonnées du point A sont : $(2\,;\,-5)$.

2. a. Montrons que $f'(x) = 1{,}5x(x-4)$ pour tout réel de l'intervalle $[-2; 6]$.

   $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 3$,

   Donc : $f'(x) = 0{,}5(3x^2) - 3(2x) = 1{,}5x^2 - 6x$.

   D'où : $f'(x) = 1{,}5x \times x - 1{,}5 \times 4 \times x = 1{,}5x(x-4)$.

   b. Déterminons $f'(2)$.

   $f'(2) = 1{,}5 \times 2 \times (2-4) = 3 \times (-2) = -6$.

   $f'(2)$ est la pente de la tangente à la courbe (C_f) au point de la courbe d'abscisse 2.

   c. Justifions qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2 soit :

$$y = -6x + 7$$

   L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2 s'écrit sous la forme :

$$y = -6x + p$$

   car $f'(2) = -6$ est la pente de la tangente au point de la courbe d'abscisse 2.

   Comment déterminer p ?

   Le point de coordonnées $(2\ ;\ -5)$ appartient à la tangente, donc ces deux coordonnées. v vérifient la relation : $y = -6x + p$.

   D'où : $-5 = -6(2) + p$. D'où : $p = 12 - 5 = 7$.

   Conclusion : L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2 est bien :

$$y = -6x + 7$$