

dérivation et fonctions polynomiales

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

1. On a : $f(0) = \frac{1}{2}(0)^2 - (0) - 4 = -4$

Et $f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - (2) - 4 = 2 - 2 - 4 = -4$.

2. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0 ; -4)$ et $(2 ; -4)$.

Voir A et B sur l'ANNEXE.

3. Démontrons que $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$.

$$\frac{1}{2}(x+2)(x-4) = \frac{1}{2}[(x+2)(x-4)] = \frac{1}{2}[x^2 - 4x + 2x - 8] = \frac{1}{2}[x^2 - 2x - 8]$$

Donc : $\frac{1}{2}(x+2)(x-4) = f(x)$.

4. On a : $f(-2) = \frac{1}{2}(-2+2)(2-4) = 0$ et $f(4) = \frac{1}{2}(4+2)(4-4) = 0$.

5. Les points C et D ont respectivement pour coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(4 ; 0)$.

6. Les coordonnées du point S, sommet de la parabole représentée, sont $(1 ; f(1))$ avec :

$$f(1) = \frac{1}{2}(1+2)(1-4) = -\frac{9}{2}.$$

7. Démontrons que $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$.

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}[(x-1)^2 - 9] = \frac{1}{2}[(x-1)^2 - 3^2] = \frac{1}{2}[(x-1-3)(x-1+3)]$$

D'où : $\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x-4)(x+2) = f(x)$.

8. L'expression $\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$ étant de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$, on a :

$a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ et $\beta = -\frac{9}{2}$. Les coefficients α et β sont les coordonnées du sommet S de la parabole.

9. L'équation de l'axe de symétrie de la parabole est $x = 1$ car tous les points de la parabole ont en commun le fait que leur abscisse toujours égale à 1, quelle que soit la valeur ordonnée

10. Déterminons $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x) - 1 = x - 1.$$

11. Déterminons $f'(2)$.

$f'(2) = 2 - 1 = 1$. Ce nombre est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, ici le point B.

12. Déterminons l'équation réduite de la tangente (T_2) à la parabole au point d'abscisse 2.

L'équation réduite de la tangente (T_2) s'écrit sous la forme : $y = x + p$ car sa pente est égale à $f'(2) = 1$.

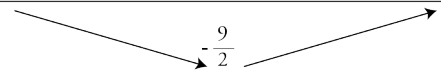
Déterminons p .

$B(2 ; -4) \in (T_2)/y = x + p$, donc : $-4 = 2 + p$, d'où : $p = -6$.

En résultat, tangente (T_2) a pour équation réduite : $y = x - 6$.

13. Pour le tracé de la tangente (T_2) , voir ANNEXE.

14. Tableau de variation de la fonction f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

15. Tableau de signe de la fonction f .

x	$-\infty$	-2	$+4$	$+\infty$	
$x - 4$	-	-	0	+	
$x + 2$	-	0	+	+	
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

16. Démontrons que $f(x) \geq -\frac{9}{2}$.

On a : $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2}$.

Or : $\frac{1}{2}(x - 1)^2 \geq 0$, donc : $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}$. Donc : $f(x) \geq -\frac{9}{2}$.

On dit que $-\frac{9}{2}$ est le minima de la fonction. Cette valeur est atteinte pour : $x = 1$.

