

évaluation sur les vecteurs

Correction

Exercice 1

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$

1. Calculons $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+1 \\ -3+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$.

$$\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3+2 \\ -3-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et soient $A(1 ; -2)$, $B(5 ; -4)$ et $C(-3 ; 5)$ trois points du plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 5-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminons $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{4 \times 9 + 4 \times 4} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

3. Déterminons $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et $\det(\vec{v}, \vec{w})$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \times 4 - (-6) \times 3 = -8 + 18 = 10.$$

$$\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -6 \times (-7) - 5 \times 4 = 42 - 20 = 22.$$

Exercice 3

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

Démontrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - (-8) \times (-1) = 8 - 8 = 0.$$

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exercice 4

Soient $A(2 ; 3)$, $B(4 ; 4)$, $C(-4 ; -2)$ et $D(2 ; 1)$ quatre points définis dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminons si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Calculons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminons $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 6 \times 1 = 6 - 6 = 0.$$

Conclusion

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, on a : $(AB) // (CD)$.

Exercice 5

Soient $A(-1 ; 0)$, $B(3 ; 3)$ et $C(5 ; 4,5)$ trois points définis dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminons si les points A , B et C sont alignés.

Calculons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 4,5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Déterminons $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1,5 \end{vmatrix} = 4 \times 1,5 - 2 \times 3 = 6 - 6 = 0.$$

Conclusion

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires, on a : A , B et C alignés.