

Fonction polynomiale croissante/décroissante

Une fonction f polynomiale de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

- décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; \alpha]$, puis croissante sur l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$ lorsque $a > 0$,
- croissante sur l'intervalle $]-\infty ; \alpha]$, puis décroissante sur l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$ lorsque $a < 0$.

Le nombre α étant l'abscisse du sommet S de la parabole représentative de la fonction, α étant égal à $-\frac{b}{2a}$.

Fonction croissante

Définition 1

Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle si et seulement si elle conserve l'ordre sur cet intervalle.

Autrement dit, f croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Définition 2

Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle si et seulement si, lorsque x augmente sur cet intervalle, l'image par f de x augmente.

Fonction décroissante

Définition 1

Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle si et seulement si elle change l'ordre sur cet intervalle.

Autrement dit, f décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Définition 2

Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle si et seulement si, lorsque x augmente sur cet intervalle, l'image par f de x diminue.

Application

1.1. Démontrons que la fonction f définie par : $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tous réels $x_1, x_2 \in [0 ; +\infty[$. A-t-on $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$?

L'ordre est-il conservé par la fonction ?

Déterminons $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Or : $x_1, x_2 \in [0 ; +\infty[$. Donc : $x_1 \geq 0$ et $x_2 > x_1 \geq 0$. D'où : $x_1 + x_2 > 0$

Par ailleurs : $x_1 < x_2$. Donc : $x_1 - x_2 < x_2 - x_2 = 0$.

Conclusion : $f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} < 0$ si $x_1 < x_2$.

D'où : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.

La fonction carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1.2. Démontrons que la fonction f définie par : $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Pour tous réels $x_1, x_2 \in]-\infty ; 0]$. A-t-on $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$?

L'ordre est-il changé par la fonction ?

Déterminons $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Or : $x_1, x_2 \in]-\infty ; 0]$. Donc : $x_2 \leq 0$ et $x_1 < x_2 \leq 0$. D'où : $x_1 + x_2 < 0$

Par ailleurs : $x_1 < x_2$. Donc : $x_1 - x_2 < x_2 - x_2 = 0$.

Conclusion : $f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(x_1 + x_2)}_{<0} > 0$ si $x_1 < x_2$.

D'où : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.

La fonction carrée est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

2. Démontrons que la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Pour tous réels $x_1, x_2 \in [2 ; +\infty[$. A-t-on $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$?

L'ordre est-il conservé par la fonction ?

Déterminons $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^2 - 4(x_1) + 3 - [(x_2)^2 - 4(x_2) + 3].$$

$$\text{Donc : } f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^2 - 4(x_1) + 3 - (x_2)^2 + 4(x_2) - 3.$$

$$\text{D'où : } f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2 - 4(x_1) + 4(x_2).$$

$$\text{Ainsi : } f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4).$$

Or : $x_1, x_2 \in [2 ; +\infty[$. Donc : $x_1 \geq 2$ et $x_2 > x_1 \geq 2$. D'où : $x_1 + x_2 > 4$.

D'où : $x_1 + x_2 - 4 > 0$.

Par ailleurs : $x_1 < x_2$. Donc : $x_1 - x_2 < x_2 - x_2 = 0$.

Conclusion : $f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(x_1 + x_2 - 4)}_{>0} < 0$ si $x_1 < x_2$.

D'où : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.

La fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

3. Démontrons que la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x$ est décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

Pour tous réels $x_1, x_2 \in [1 ; +\infty[$. A-t-on $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$?

L'ordre est-il changé par la fonction ?

Déterminons $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = -(x_1)^2 + 2(x_1) - [-(x_2)^2 + 2(x_2)].$$

$$\text{Donc : } f(x_1) - f(x_2) = -(x_1)^2 + 2(x_1) + (x_2)^2 - 2(x_2).$$

$$\text{D'où : } f(x_1) - f(x_2) = -(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2(x_1) - 2(x_2).$$

$$\text{D'où : } f(x_1) - f(x_2) = -[(x_1)^2 - (x_2)^2] + 2(x_1 - x_2).$$

$$\text{Ainsi : } f(x_1) - f(x_2) = -(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(-x_1 - x_2 + 2).$$

Or : $x_1, x_2 \in [1 ; +\infty[$. Donc : $x_1 \geq 1$ et $x_2 > x_1 \geq 1$. D'où : $x_1 + x_2 > 2$.

D'où : $-x_1 - x_2 + 2 < 0$.

Par ailleurs : $x_1 < x_2$. Donc : $x_1 - x_2 < x_2 - x_2 = 0$.

Conclusion : $f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(-x_1 - x_2 + 2)}_{<0} > 0$ si $x_1 < x_2$.

D'où : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$. La fonction change l'ordre sur $[1 ; +\infty[$.

La fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.