

Racines d'un trinôme et méthode du discriminant (approche n°2)

Soit le trinôme du second degré : $ax^2 + bx + c$.

Comment déterminer les éventuelles valeurs qui annulent le trinôme, c'est-à-dire les racines du trinôme (si celles-ci existent) ?

Les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Montrons que : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \text{ car } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

2. Montrons que : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2(x)\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

3. Montrons que : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

4. Montrons que : $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{\Delta}{4a^2}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{(4a)c}{(4a)a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac.$$

5. Montrons que : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$.

$$\text{D'après le 3., on a : } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

$$\text{Or, d'après le 4., on a : } \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\text{Donc : } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}.$$

6. Si $\Delta < 0$, alors le trinôme ne possède aucune racine car $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$.

7. Si $\Delta = 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. Le trinôme possède une racine dite double notée généralement : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Dans ce cas, on peut factoriser le trinôme : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

8. Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2} > 0$.

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{(2a)^2}} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{(2a)^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le trinôme possède deux racines distinctes notées généralement : x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

9. Calculer le discriminant Δ du trinôme permet de savoir si le trinôme possède des racines :

— Le trinôme ne possède aucune racine lorsque $\Delta < 0$. Dans ce cas, on ne peut le factoriser.

— Il possède une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ lorsque $\Delta = 0$.

Dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

— Il possède deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ lorsque $\Delta > 0$.

Dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

10. Le trinôme n'est pas factorisable lorsque $\Delta < 0$ mais il l'est dans les autres cas (voir 9. ci-dessus).