

Racines d'un trinôme et méthode du discriminant (approche n°3)

Soit le trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Comment déterminer les éventuelles valeurs qui annulent le trinôme, c'est-à-dire les racines du trinôme ?

Nous savons que la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est $a(x - \alpha)^2 + \beta$

où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

1. Exprimons β en fonction des coefficients a , b et c .

$$\text{On a : } \beta = P(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a}.$$

$$\text{Donc : } \beta = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$

$$\text{D'où : } \beta = -\frac{b^2}{4a} + c = c - \frac{b^2}{4a}.$$

2. Exprimons β en fonction du discriminant Δ du trinôme où Δ est égal à $b^2 - 4ac$.

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

3. Montrons que : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = -\frac{\beta}{a}$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta = 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 = -\beta$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = -\frac{\beta}{a}.$$

4. Montrons que : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = -\frac{\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)}{a} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}.$$

5. Tableau ci-dessous :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racine(s) ?	Aucune racine	1 racine double	2 racines distinctes

— Le trinôme ne possède aucune racine lorsque $\Delta < 0$. Dans ce cas, on ne peut le factoriser.

— Il possède une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ lorsque $\Delta = 0$.

Dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

— Il possède deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ lorsque $\Delta > 0$.

Dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.