

Racines d'un trinôme et méthode du discriminant

On appelle racines d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les valeurs qui annulent le trinôme, c'est-à-dire les solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (E).

Exemple

Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ s'annule lorsque $x = 1$ et $x = 3$. On dit que les racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3. 1 et 3 sont les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. Dans ce cas, on peut écrire : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Comment déterminer si un trinôme possède des racines et lesquelles ?

1. Démontrons l'équivalence : $ax^2 + bx + c = 0$ (E) $\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ ($a \neq 0$).

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \text{ (E)} &\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow \\ (2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac &= 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 - b^2 = 4ac \Leftrightarrow \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

2. On appelle discriminant (delta) du trinôme $ax^2 + bx + c$ l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$.

- 2.1. On suppose $\Delta > 0$. Résolvons l'équation (E).

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \text{ (E)} &\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = \Delta > 0 \Leftrightarrow 2ax + b = -\sqrt{\Delta} \text{ ou} \\ 2ax + b &= +\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 2ax = -b - \sqrt{\Delta} \text{ ou } 2ax = -b + \sqrt{\Delta} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Quand $\Delta > 0$, l'équation (E) possède **deux solutions distinctes**, généralement notées $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

On peut écrire : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- 2.2. On suppose $\Delta = 0$. Résolvons l'équation (E).

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \text{ (E)} &\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \\ \Leftrightarrow 2ax &= -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

Quand $\Delta = 0$, l'équation (E) possède **une unique solution**, notée $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

On peut écrire : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

- 2.3. On suppose $\Delta < 0$. Résolvons l'équation (E).

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (E)} \Leftrightarrow (2ax + b)^2 < 0 \text{ Un carré ne pouvant être négatif,}$$

l'équation n'admet aucune solution. Le trinôme ne s'annule jamais et est soit strictement positif, soit strictement négatif. Aucune factorisation n'est possible.

3. Dans chaque cas, déterminons le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, déterminons ses éventuelles racines et factorisons lorsque possible.

3.1. Trinôme $x^2 - 7x + 10$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9 > 0.$$

Le trinôme possède **deux racines distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\text{C'est-à-dire : } x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2, \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\text{D'où : } x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

3.2. Trinôme $x^2 + x - 6$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0.$$

Le trinôme possède **deux racines distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\text{C'est-à-dire : } x_1 = \frac{-(1)-\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1-5}{2} = -\frac{6}{2} = -3, \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(1)+\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{D'où : } x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

3.3. Trinôme $x^2 - x - 1$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5 > 0.$$

Le trinôme possède **deux racines distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\text{C'est-à-dire : } x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ et } x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{D'où : } x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

3.4. Trinôme $2x^2 - 8x + 8$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(8) = 64 - 64 = 0.$$

Le trinôme possède **une racine double** : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

$$\text{C'est-à-dire : } x_0 = -\frac{(-8)}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2.$$

On peut écrire : $2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)^2$.

3.5. Trinôme $-3x^2 + 5x - 4$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-3)(-4) = 25 - 48 = -23 < 0.$$

Le trinôme n'admet aucune racine. Il ne peut pas être factorisé.

Ici, pour tout x réel, on a : $-3x^2 + 5x - 4 < 0$.