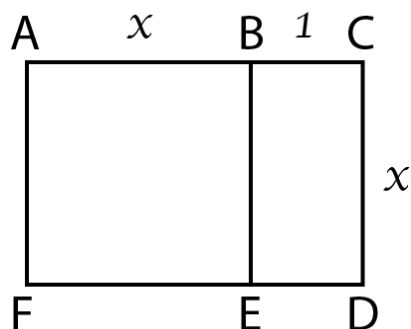


Trinôme, nombre d'or et polynômes symétriques

On considère la figure ci-dessous sur laquelle $ABEF$ est un carré, $ACDF$ et $BCDE$ étant des rectangles.



On suppose : $AB = CD = x$ et $BC = 1$.

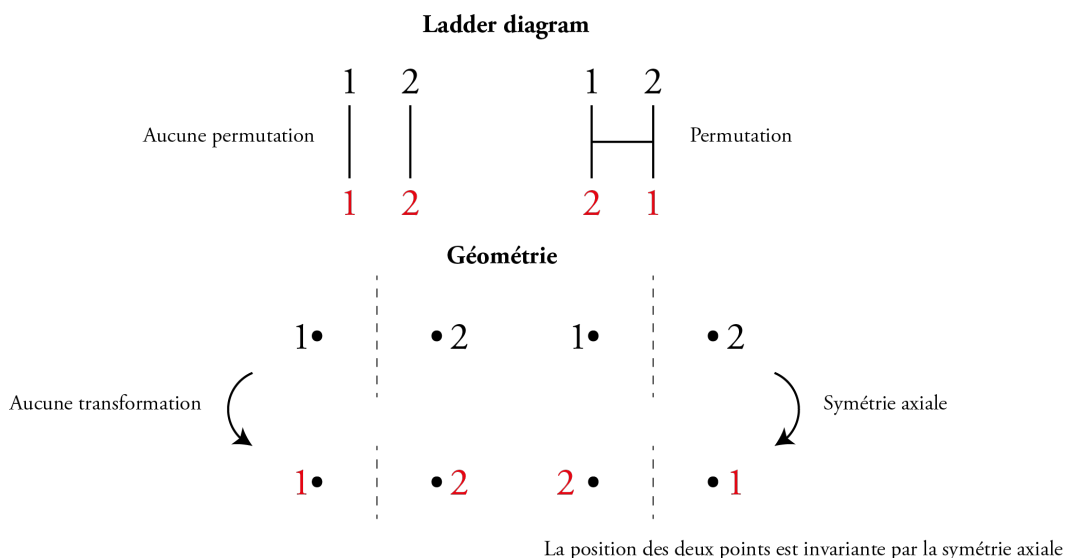
- 1) On suppose que les rectangles $ACDF$ et $BCDE$ ont mêmes proportions. Traduire mathématiquement cette hypothèse et en déduire l'égalité : $x^2 - x - 1 = 0$.

- 2) On admet que le trinôme $x^2 - x - 1$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2 .

Montrer que : $x_1 + x_2 = 1$

$$x_1 x_2 = -1$$

- 3) On considère la figure ci-dessous :



Justifier que $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ sont appelés polynômes symétriques.

Le polynôme $x_1 - x_2$ est-il un polynôme symétrique ?

- 4) Les polynômes $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ sont appelés **polynômes symétriques élémentaires**.

Le théorème fondamental des polynômes symétriques stipule que : "tout polynôme symétrique peut s'écrire à partir de deux polynômes symétriques élémentaires".

Le polynôme $(x_1 + x_2)^2$ est-il un polynôme symétrique ?

Montrer que $(x_1 + x_2)^2$ peut s'écrire à partir des polynômes $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.

En déduire que $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

- 5) Le polynôme $(x_1 - x_2)^2$ est-il un polynôme symétrique ?

Montrer que $(x_1 - x_2)^2$ peut s'écrire à l'aide des polynômes $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.

En déduire que $(x_1 - x_2)^2 = 5$.

- 6) Démontrer que les nombres x_1 et x_2 sont les solutions du système de deux équations linéaires à deux inconnues ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

En déduire que $AB = \varphi$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce nombre étant appelé **nombre d'or**.

compléments

Nous avons montré que les racines x_1 et x_2 du trinôme $x^2 - x - 1$ vérifient, par exemple :

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 x_2 = -1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 5$$

- 7) On considère le polynôme $P(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$.

Ce polynôme est-il symétrique ?

Montrer que les racines x_1 et x_2 du trinôme $x^2 - x - 1$ vérifient $P(x_1, x_2) = 4$.

- 8) On considère le polynôme $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_1^2 x_2^3 + 2x_1^3 x_2^2$.

Ce polynôme est-il symétrique ?

Montrer que les racines x_1 et x_2 du trinôme $x^2 - x - 1$ vérifient $Q(x_1, x_2) = 6$.

- 9) Que peut-on déduire quant aux racines x_1 et x_2 du trinôme $x^2 - x - 1$?