

Forme canonique d'un trinôme

Un trinôme du second degré est défini par une expression (développée) de la forme $ax^2 + bx + c$, les réels a , b et c étant les coefficients qui caractérisent d'une manière unique le trinôme. Connaître la forme canonique d'un trinôme du second degré présente un intérêt pour déterminer la valeur pour laquelle le trinôme admet un extremum.

Forme canonique - Définition

La forme canonique de l'expression $ax^2 + bx + c$ est :

$$a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où : $\alpha = -\frac{b}{2a}$

et : $\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c$

Comment déterminer une forme canonique ?

1. Méthode par identification

Soit le trinôme : $2x^2 + 4x - 6$.

La forme canonique de ce trinôme s'écrit : $2(x - \alpha)^2 + \beta$

Pour déterminer α et β , développons $2(x - \alpha)^2 + \beta$.

$$2(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = 2x^2 - 4\alpha x + 2\alpha^2 + \beta.$$

$$\text{Or, } 2x^2 + 4x - 6 = 2(x - \alpha)^2 + \beta.$$

$$\text{Donc : } 2x^2 + 4x - 6 = 2x^2 - 4\alpha x + 2\alpha^2 + \beta.$$

Deux trinômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients respectifs sont égaux, on peut écrire que :

$$\begin{cases} 4 = -4\alpha \\ -6 = 2\alpha^2 + \beta \end{cases}$$

$$\text{On en déduit donc que : } \begin{cases} \alpha = \frac{4}{-4} = -1 \\ -6 = 2(-1)^2 + \beta \end{cases}, \text{ d'où : } \begin{cases} \alpha = -1 \\ -6 = 2 + \beta \end{cases}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -6 - 2 = -8 \end{cases}$$

$$\text{En résultat, on a : } 2x^2 + 4x - 6 = 2(x - (-1))^2 - 8 = 2(x + 1)^2 - 8.$$

Forme développée du trinôme

Forme canonique du trinôme

2. Méthode directe par réinvestissement des notions de cours

Soit le trinôme : $2x^2 + 4x - 6$. La forme canonique de ce trinôme est : $2(x - \alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(2)} = -1 \text{ car } a = 2, b = 4 \text{ et } c = -6.$$

$$\beta = 2\alpha^2 + 4\alpha - 6 = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = 2 - 4 - 6 = -8$$

$$\text{En résultat, on a : } 2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 1)^2 - 8.$$