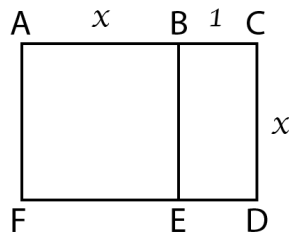


Trinôme, nombre d'or et polynômes symétriques

Correction

On considère la figure :

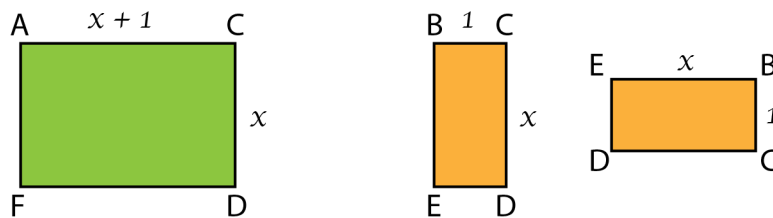


Les quadrilatères ACDF et BCDE sont des rectangles qui ont les mêmes proportions.

On pose : $AB = CD = x$ et $BC = 1$.

1) Démontrons l'égalité : $x^2 - x - 1 = 0$.

D'après l'énoncé, ACDF et BCDE ont les mêmes proportions, donc : $\frac{AC}{CD} = \frac{EB}{BC}$, par exemple.



D'où : $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} = x$.

Cours élémentaire : On rappelle que : $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$

Ainsi : $x + 1 = x^2$.

Donc : $x^2 = x + 1$.

En résultat : $x^2 - x - 1 = 0$.

2) Hypothèses : x_1 et x_2 sont deux racines distinctes du trinôme $x^2 - x - 1$.

Montrons que : $x_1 + x_2 = 1$

$$x_1 x_2 = -1$$

x_1 étant racine du trinôme $x^2 - x - 1$, on a : $x_1^2 - x_1 - 1 = 0$ ($A = 0$).

x_2 étant racine du trinôme $x^2 - x - 1$, on a : $x_2^2 - x_2 - 1 = 0$ ($B = 0$).

On a deux expressions de la forme $A = 0$ et $B = 0$. Donc $A - B = 0$.

Ainsi : $x_1^2 - x_1 - 1 - (x_2^2 - x_2 - 1) = 0$. D'où : $x_1^2 - x_1 - 1 - x_2^2 + x_2 + 1 = 0$.

Donc : $x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2) = 0$. C'est-à-dire : $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0$.

Enfin : $(x_1 - x_2)[(x_1 + x_2) - 1] = 0$. Or x_1 et x_2 sont deux racines distinctes,

donc : $x_1 - x_2 \neq 0$.

Enfin : $(x_1 + x_2) - 1 = 0$.

En résultat : $x_1 + x_2 = 1$. QED (Quod Erat Demonstrandum) ou $\square$ ou CQFD.

De la même manière : $A = 0$ et $B = 0$ impliquent $A + B = 0$.

Ainsi : $x_1^2 - x_1 - 1 + (x_2^2 - x_2 - 1) = 0$. D'où : $x_1^2 - x_1 - 1 + x_2^2 - x_2 - 1 = 0$.

Donc : $x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) - 2 = 0$. C'est-à-dire : $x_1^2 + x_2^2 - (1) = 2$.

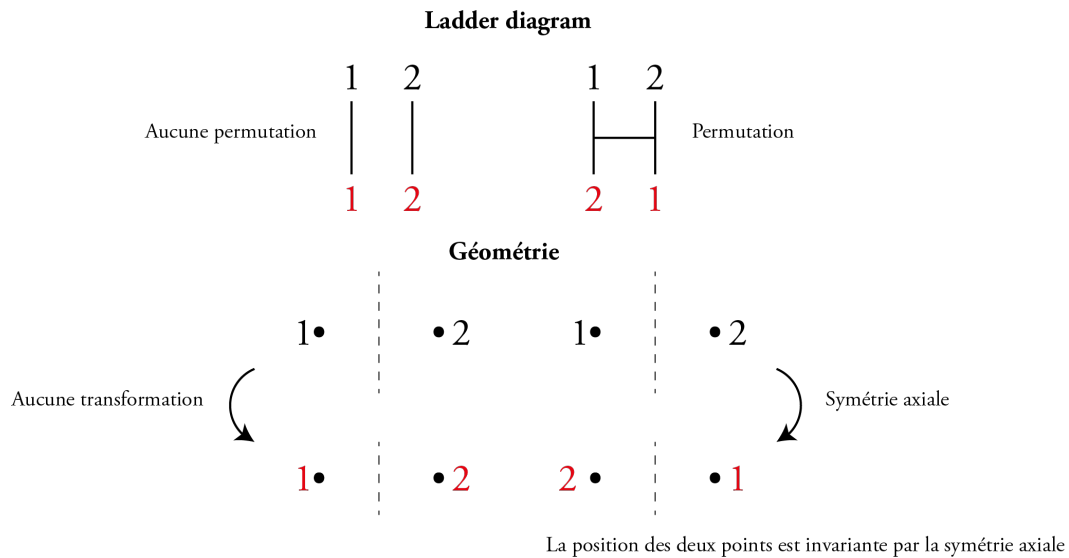
Enfin : $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Or $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1)^2 - 2x_1x_2$.

donc : $1 - 2x_1x_2 = 3$.

Enfin : $2x_1x_2 = -2$.

En résultat : $x_1x_2 = \frac{-2}{2} = -1$. QED (Quod Erat Demonstrandum) ou $\square$ ou CQFD.

3) On considère la figure ci-dessous :



$x_1 + x_2$ et x_1x_2 sont appelés polynômes symétriques car leurs valeurs ne changent pas quand on permute les indices 1 et 2, de la même manière que la configuration géométrique représentée ne change pas par la symétrie axiale d'axe la médiatrice du segment étiqueté 1- 2.