Racines d'un trinôme et méthode du discriminant

On appelle racines d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les valeurs qui annulent le trinôme, c'est-à-dire les solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (E).

<u>Exemple</u>

Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ s'annule lorsque $x = 1$ et $x = 3$. On dit que les racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3. 1 et 3 sont les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. Dans ce cas, on peut écrire : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Comment déterminer si un trinôme possède des racines et lesquelles ?

1. Démontrons l'équivalence : $ax^2 + bx + c = 0$ (E) $\Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ $(a \neq 0)$.

   $ax^2 + bx + c = 0$ (E) $\Leftrightarrow$ $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ $\Leftrightarrow$

   $(2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac = 0$ $\Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 - b^2 = 4ac$ $\Leftrightarrow$

   $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

2. On appelle discriminant (delta) du trinôme $ax^2 + bx + c$ l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$.

   2.1. On suppose $\Delta > 0$. Résolvons l'équation (E).

   $ax^2 + bx + c = 0$ (E) $\Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 = \Delta > 0$ $\Leftrightarrow$ $2ax + b = -\sqrt{\Delta}$ ou

   $2ax + b = +\sqrt{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $2ax = -b - \sqrt{\Delta}$ ou $2ax = -b + \sqrt{\Delta}$

   $\Leftrightarrow$ $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   Quand $\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'équation (E) possède **deux solutions distinctes**, généralement notées $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

   On peut écrire : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

   2.2. On suppose $\Delta = 0$. Résolvons l'équation (E).

   $ax^2 + bx + c = 0$ (E) $\Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $2ax + b = 0$

   $\Leftrightarrow$ $2ax = -b$ $\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{b}{2a}$.

   Quand $\boldsymbol{\Delta = 0}$, l'équation (E) possède **une unique solution**, notée $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

   On peut écrire : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

   2.3. On suppose $\Delta < 0$. Résolvons l'équation (E).

   $ax^2 + bx + c = 0$ (E) $\Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 < 0$ Un carré ne pouvant être négatif,

l'équation n'admet aucune solution. Le trinôme ne s'annule jamais et est soit strictement positif, soit strictement négatif. Aucune factorisation n'est possible.

3. Dans chaque cas, déterminons le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, déterminons ses éventuelles racines et factorisons lorsque possible.

3.1. Trinôme $x^2 - 7x + 10$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9 > 0.$

Le trinôme possède **deux racines distinctes** :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$, et

$x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

D'où : $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.

3.2. Trinôme $x^2 + x - 6$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0.$

Le trinôme possède **deux racines distinctes** :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-(1)-\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1-5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$, et

$x_2 = \frac{-(1)+\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

D'où : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$.

3.3. Trinôme $x^2 - x - 1$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5 > 0.$

Le trinôme possède **deux racines distinctes** :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D'où : $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.4. Trinôme $2x^2 - 8x + 8$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(8) = 64 - 64 = 0.$

Le trinôme possède **une racine double** : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

C'est-à-dire : $x_0 = -\frac{(-8)}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2.$

On peut écrire : $2x^2 - 8x + 8 = 2(x-2)^2$.

3.5. Trinôme $-3x^2 + 5x - 4$.

Déterminons le discriminant du trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-3)(-4) = 25 - 48 = -23 < 0.$

Le trinôme n'admet aucune racine. Il ne peut pas être factorisé.

Ici, pour tout x réel, on a : $-3x^2 + 5x - 4 < 0$.