

un peu de logique

Définition 1

Une **assertion** ou **proposition** est un énoncé ne contenant pas de variable pouvant être vrai ou faux. On dit que les deux valeurs de vérité d'une assertion sont Vrai et Faux.

Les mots **assertion** et **proposition** sont des synonymes.

Exemples

"*Un triangle rectangle possède un angle droit*" est une assertion. Elle est vraie.

"*La nuit, le Soleil brille*" est une assertion. Elle est fausse.

Définition 2

Un prédicat est une assertion qui contient une ou plusieurs variables.

Exemple

L'expression " $x^2 - 1 = 3$ " est un prédicat.

Lorsqu'on remplace x par 2, le prédicat devient une assertion : " $2^2 - 1 = 3$ ". Celle-ci est vraie.

Lorsqu'on remplace x par 3, le prédicat devient une assertion : " $3^2 - 1 = 3$ ". Celle-ci est fausse.

Langage mathématique

Il n'est pas toujours aisé d'utiliser correctement la terminologie mathématique et facile de bien saisir la nuance entre "assertion" ou "proposition" et "prédicat". C'est la raison pour laquelle nous utiliserons préférentiellement indistinctement les mots usuels "expressions", "énoncés", "phrase" et éventuellement "assertion" pour décrire un énoncé contenant ou non des variables, le mot prédicat étant d'un usage délicat.

connecteurs logiques

Soit A et B deux assertions. A partir de ces deux assertions, il est possible de définir ou formuler de nouvelles assertions en utilisant des connecteurs logiques.

Deux connecteurs logiques sont en particulier très utiles dans la formulation d'énoncés complexes, dans la résolution d'équations ou dans l'articulation de raisonnements :

1. Connecteur logique d'implication $\Rightarrow$

Le symbole $\Rightarrow$ est appelé connecteur logique d'implication. Il se lit "implique" ou "Si..., alors...".

Exemple

L'énoncé vrai "Si $x + 2 = 5$, alors $x = 3$ " s'articule autour des deux assertions suivantes : l'assertion $x + 2 = 5$ et l'assertion $x = 3$.

Grace au connecteur logique, il est plus fluide d'écrire : $x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$

2. Connecteur logique d'équivalence $\Leftrightarrow$.

Le symbole $\Leftrightarrow$ est appelé connecteur logique d'équivalence. Il se lit "équivalent à" ou "Si et seulement si...".

Exemple

Nous avons écrit précédemment : $x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$.

De la même manière : $x = 3 \Rightarrow x + 2 = 5$. En effet, "Si $x = 3$, alors $x + 2 = 5$ ".

Cette double implication permet d'écrire simplement : $x + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

L'énoncé " $x + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 3$ " se lit : " $x + 2 = 5$ " équivaut à " $x = 3$ " ou

" $x + 2 = 5$ " si et seulement si " $x = 3$ ".

utilisation des connecteurs logiques

Exemple 1

Soit A l'assertion "Le triangle ABC est un triangle rectangle en B".

Soit B l'assertion : " $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ".

Nous pouvons écrire d'une manière très concise : $A \Rightarrow B$. Cet énoncé très simplifié n'est autre que la formulation du théorème de Pythagore.

Exemple 2

Soit l'équation ("prédicat") : $3x + 5 = x + 11$.

Pour résoudre une telle équation, l'usage est de simplifier, en progressant par équivalences successives, l'équation initiale de manière à parvenir à l'écriture d'une équation dite triviale de la forme " $x = \dots$ ".

Comment faire ?

Résolvons l'équation $3x + 5 = x + 11$.

$$3x + 5 = x + 11 \Leftrightarrow 3x - x = 11 - 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3.$$

En résultat, l'équation a pour solution le nombre 3.