

développement d'un binôme

On considère l'expression littérale $(a + b)$, expression appelée aussi binôme.

1. Déterminer $(a + b)^0$, déterminer $(a + b)^1$.

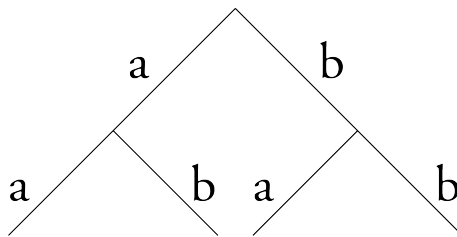
2. Développer et simplifier $(a + b)^2$.

Indiquer les valeurs des coefficients des monômes apparaissant dans l'expression obtenue (autrement dit, combien de fois observe-t-on les produits a^2 ? ab ? b^2 ?)

Pour développer $(a + b)^2$, il est possible de procéder pas à pas comme ci-dessous :

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = \dots$$

A l'aide de l'arbre représenté, identifier un moyen simple de déterminer les coefficients précédents.

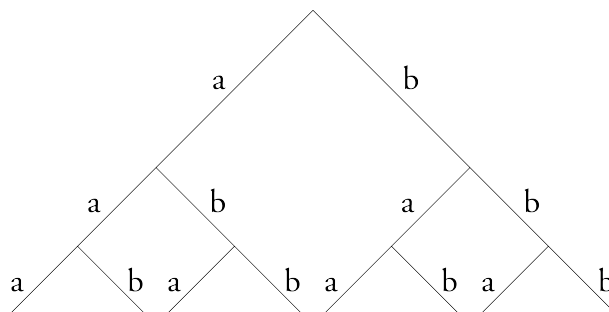


3. Développer et simplifier $(a + b)^3$. Indiquer les valeurs des coefficients de chacun des monômes apparaissant dans l'expression obtenue.

Pour développer $(a + b)^3$, il est possible de procéder pas à pas comme ci-dessous :

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = aa(a + b) + ab(a + b) + ba(a + b) + bb(a + b)$$

A l'aide de l'arbre ci-dessous, déterminer les coefficients précédents.

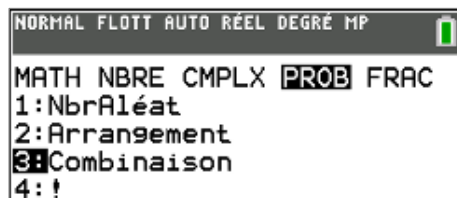


5. Développer sans aucun calcul l'expression $(a + b)^4$ en utilisant un arbre.

6. Déterminer l'expression développée de $(a + b)^5$ en construisant l'arbre qui convient.

coefficients binomiaux

Les coefficients obtenus dans chacune des expressions sont appelés **coefficients binomiaux**. Le $(k+1)$ -ième coefficient (k allant de 0 à n) de l'expression développée du binôme $(a + b)^n$ est noté $\binom{n}{k}$ et peut être directement obtenu à l'aide de la calculatrice en tapant sur la touche qui ouvre le menu ci-dessous.



En sélectionnant PROB, puis 3:Combinaison, on obtient la possibilité de calculer un coefficient binomial quelconque.

exemple 1

L'expression $(a + b)^2$ s'écrit sous la forme $1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$.

En tapant sur la calculatrice les séquences ci-dessous :

${}^2C_0$	1
${}^2C_1$	2
${}^2C_2$	1

On observe que le premier coefficient $\binom{2}{0}$ est 1.

On observe que le deuxième coefficient $\binom{2}{1}$ est 2.

On observe que le troisième coefficient $\binom{2}{2}$ est 1.

exemple 2

L'expression $(a + b)^5$ s'écrit sous la forme :

$$\dots a^5 + \dots a^4b + \dots a^3b^2 + \dots a^2b^3 + \dots ab^4 + \dots b^5.$$

Le coefficient $\binom{5}{3}$ est le quatrième coefficient de $(a + b)^5$, parmi les 6 coefficients existants.

En tapant sur la calculatrice la séquence ci-dessous :

${}^5C_3$	10
-----------	----

On observe que le quatrième coefficient, parmi les 6 possibles, est 10.

Application

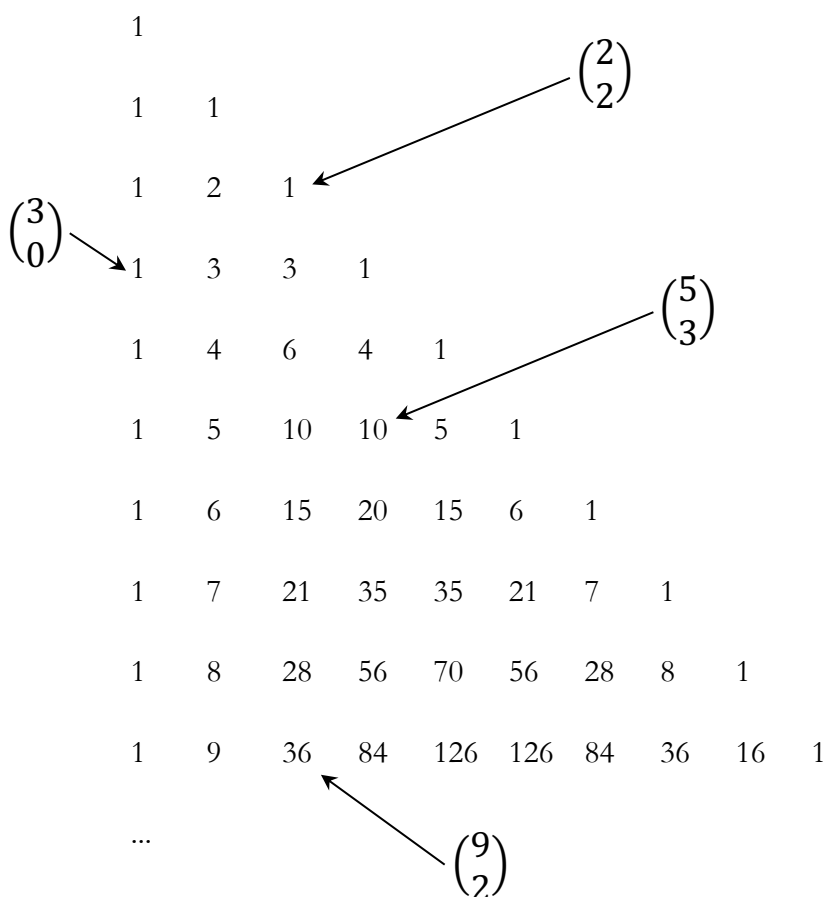
Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^5$, c.-à-d. tous les coefficients manquants de $\dots a^5 + \dots a^4b + \dots a^3b^2 + \dots a^2b^3 + \dots ab^4 + \dots b^5$.

exemple 3

1. Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^4$ et écrire l'expression développée.
2. Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^6$ et écrire l'expression développée.
3. Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^8$ et écrire l'expression développée.
4. Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$?
5. Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$?

TRIANGLE DE PASCAL

La détermination des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ peut se faire directement à partir du triangle de Pascal.



Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$?

Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$?

1. Développer $(1 + h)^2$.
2. Développer $(3 + h)^2$.
3. Développer $(1 + h)^3$.
4. Développer $(2 + h)^4$.
5. Développer $(a + h)^3$.
6. Développer $(a + h)^4$.