De Malthus à Verhulst...

Au XVIII[e] siècle, le pasteur et économiste anglais **Thomas Robert Malthus** s'intéresse à la croissance de la population humaine. Il observe que, si rien ne limite cette croissance, une population pourrait augmenter très rapidement, de manière exponentielle.

Le modèle discret de Malthus est un modèle selon lequel $u_{n+1} = au_n$ où (u_n) est la suite géométrique modélisant l'évolution de la population. Toutefois, dans la réalité, ce modèle s'avère excessivement simple et ne convient pas pour modéliser une croissance assujettie aux multiples contraintes environnementales. En effet, dans la réalité, les ressources ne sont jamais infinies : la nourriture manque, l'espace devient limité, des maladies apparaissent. Dans le cas où le taux de reproduction dépasse un, on sait par exemple que la population ne pourra pas tendre vers l'infini. Les contraintes limiteront l'accroissement de la population.

Au XIX[e] siècle, le mathématicien belge **Pierre-François Verhulst** propose alors un modèle plus réaliste : la croissance d'une population ralentit lorsqu'elle devient trop grande. Ce modèle conduit à ce que l'on appelle aujourd'hui **le modèle logistique**, que l'on peut étudier à l'aide d'une **suite logistique**.

Quelle fut l'idée de **Verhulst** pour prendre en compte la donnée que l'évolution de la population se fait sous une contrainte de finitude ?

L'idée est d'introduire une population maximale u_{max} supportée par le milieu. Plus on va se rapprocher de cette population limite, moins grand va être son taux de reproduction a. Pour modéliser cette idée, nous allons introduire un taux de reproduction entre le temps n et le temps $n + 1$ qui dépend de la proximité à la valeur maximale. Un choix possible est : $a_n = a(u_{max} - u_n)$. Dans ce cas, lorsque u_n approche de la valeur maximale u_{max}, le taux de reproduction se rapproche de zéro. Il y a donc une interaction forte entre le milieu et l'évolution de la population. Le modèle est donc maintenant donné par la suite : $u_{n+1} = a(u_{max} - u_n)u_n$. On peut "normaliser" cette écriture en prenant comme variable la quantité $v_n = \frac{u_n}{u_{max}}$. On obtient alors la suite :

$$v_{n+1} = r(1 - v_n)v_n$$

qui est le modèle dit logistique. Par définition de la suite (v_n), on s'intéresse à des valeurs telles que $v_n \in [0; 1]$ car $0 \leq u_n \leq u_{max}$.

Cette suite est particulièrement intéressante car, selon la valeur d'un paramètre, elle peut décrire des comportements très différents : convergence vers une valeur stable, oscillations, ou même comportements chaotiques. Dans ce dernier cas, de très petites différences dans les conditions initiales peuvent produire des évolutions très différentes.

Cette sensibilité aux conditions initiales est souvent illustrée par une célèbre métaphore proposée par le météorologue **Edward Lorenz** : **le battement d'aile d'un papillon au Brésil pourrait provoquer une tornade au Texas**. Autrement dit, dans certains systèmes dynamiques, une variation minuscule peut entraîner des conséquences imprévisibles à long terme.

La **suite logistique** constitue ainsi un exemple simple mais fascinant de modèle mathématique permettant d'explorer la croissance des populations et l'apparition du chaos.