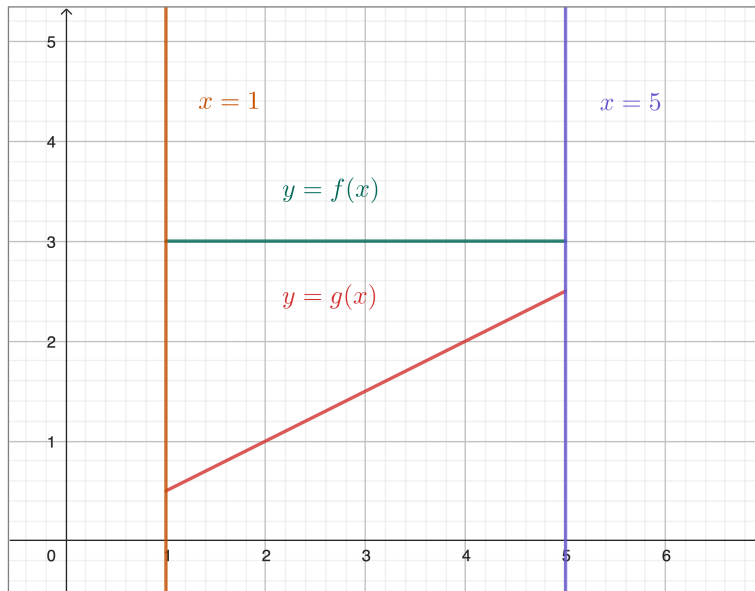


intégration

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[1; 5]$ et la fonction

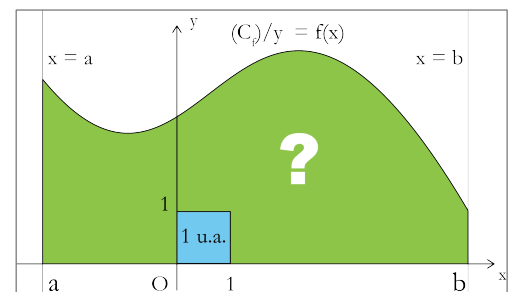
g définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x$ sur l'intervalle $[1; 5]$.

Ces deux fonctions sont représentées graphiquement par les courbes verte et rouge ci-dessous.



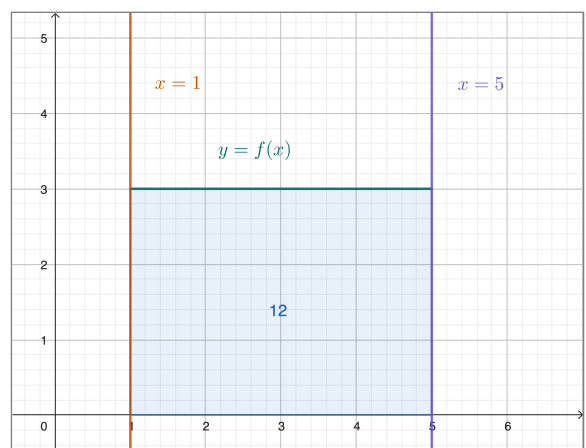
Position du problème

Étant donnée la courbe représentative d'une fonction et considérant un intervalle $[a; b]$ sur lequel cette fonction est positive, est-il possible de déterminer l'aire de la région délimitée par la courbe, l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$?



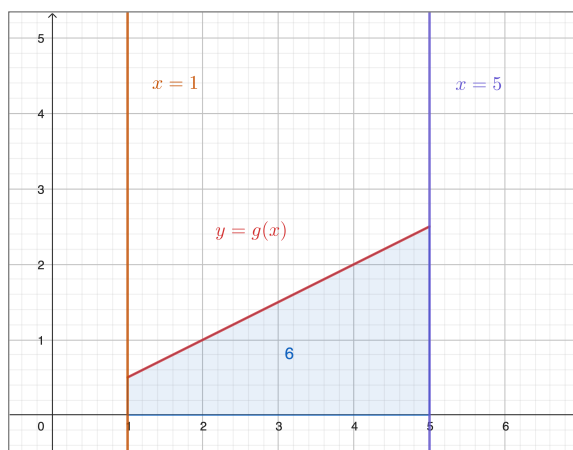
Cas de la fonction f

Sur la figure ci-contre, on observe que la courbe représentative de la fonction constante f est une droite horizontale sur l'intervalle $[1; 5]$. La région délimitée par cette droite, par l'axe (Ox) et par les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 5$ est colorée en bleu. Il s'agit d'un rectangle dont l'aire est égale à : $4 \times 3 = 12$ u.a.

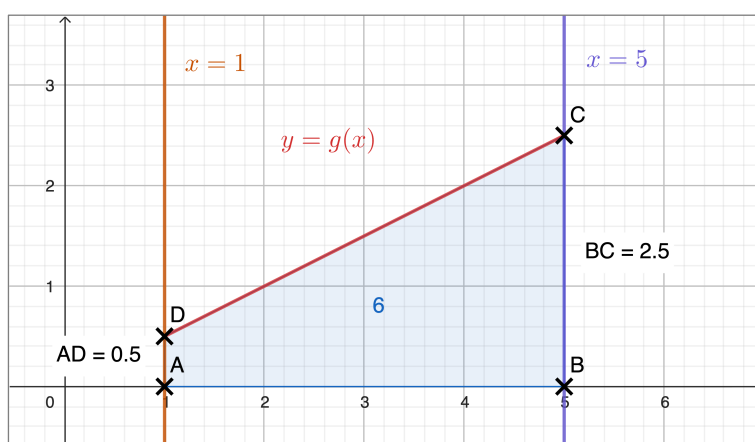


cas de la fonction g

Sur la figure ci-contre, on observe que la courbe représentative de la fonction linéaire g est une droite inclinée sur l'intervalle $[1; 5]$. La région délimitée par cette droite, par l'axe (Ox) et par les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 5$ est colorée en bleu. Il s'agit d'un trapèze dont l'aire peut être calculée.



A l'aide de GeoGebra, on visualise les longueurs AD, AB et BC.



L'aire du trapèze représenté étant donnée par la formule classique : $\frac{AD+BC}{2} \times AB$, on

obtient une aire égale à : $\frac{0,5+2,5}{2} \times 4 = \frac{3}{2} \times 4 = 3 \times 2 = 6$ u.a.

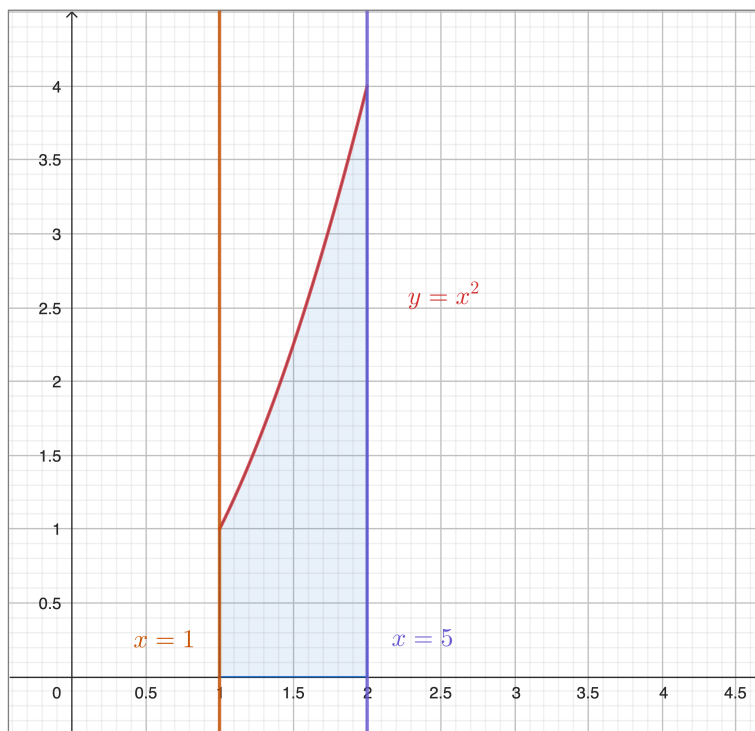
commentaire

Lorsque la région dont on souhaite déterminer l'aire est une région qui possède une forme géométrique simple (carré, rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, etc), le calcul de son aire est chose aisée.

Toutefois, nous allons voir que le calcul de l'aire de la région délimitée par une parabole par exemple, l'axe des abscisses (Ox) et deux droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ semble totalement échapper à nos compétences.

cas de la fonction carré

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[1; 2]$.



On souhaite déterminer l'aire du domaine ou région délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, représentative de la fonction carré, l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Une approche classique directe est impossible puisqu'aucune formule ne nous a jamais été présentée. Il nous est nécessaire de recourir au calcul intégral et, en particulier, à la détermination de l'expression :

$$\int_1^2 f(x) dx$$

expression symbolique indiquant le calcul de l'aire délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, représentative de la fonction carré f , l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Or, nous savons que :

$$\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1)$$

où F est une primitive de la fonction carré f , c'est-à-dire une fonction F telle que, pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$.

Recherchons une telle fonction primitive F :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & & F(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{f} & & f(x) = x^2 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{f}' & & \end{array}$$

La fonction F qu'il faut dériver pour obtenir la fonction f est définie par : $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Cette fonction F est une primitive de la fonction f . Il existe une infinité de primitives de f car toutes les fonctions G définies par $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ où c est une constante sont des primitives de la fonction f .

Calculons $F(1)$ et $F(2)$.

$$F(1) = \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{1}{3}.$$

$$F(2) = \frac{1}{3}(2)^3 = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}.$$

Déterminons l'aire recherchée.

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2,333 \dots$$

Elle est pas belle la vie ?