

étude de fonction polynomiale

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 5x + 4$.

1. Éléments de langage

La fonction f est définie par l'expression : $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

C'est-à-dire que : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$,

$$b = -5, \text{ et}$$

$$c = 4.$$

La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2.

Par conséquent, sa représentation graphique est une courbe appelée parabole, définie par l'équation $y = x^2 - 5x + 4$, par exemple.

Tous les points de coordonnées $(x; y)$ qui appartiennent à la parabole représentant la fonction f ont leur abscisse et leur ordonnée qui sont reliées par la relation $y = f(x)$.

On dit aussi que l'abscisse et l'ordonnée de chacun des points de la parabole représentative de la fonction f sont reliées entre elles par la relation $y = f(x)$.

C'est pourquoi la relation $y = x^2 - 5x + 4$ qui définit la parabole est appelée équation de la parabole représentative de la fonction f .

2. Tableau de coordonnées de points de la parabole et interprétation

x	-100	0	100
$f(x)$	10504	4	9504

$$\text{On a : } f(0) = (0)^2 - 5(0) + 4 = 4.$$

Le point de coordonnées $(0; 4)$, qui est fabriqué par la fonction f puisque son ordonnée est l'image par la fonction f de son abscisse 0, appartient à la parabole représentative de la fonction.

Ce point particulier est le point d'intersection de la parabole et de l'axe des ordonnées (Oy). Le nombre 4 est appelé ordonnée à l'origine.

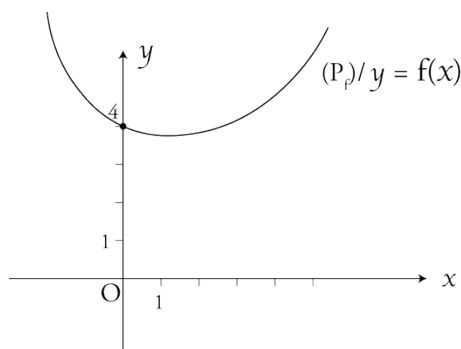
$$\text{De plus : } f(100) = (100)^2 - 5(100) + 4 = 10000 - 500 + 4 = 9504.$$

$$\text{Et : } f(-100) = (-100)^2 - 5(-100) + 4 = 10000 + 500 + 4 = 10504.$$

Les points de coordonnées $(-100; 10504)$ et $(100; 9504)$ appartiennent à la parabole. On observe que ces points sont situés très au-dessus de l'axe des abscisses (Ox). Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut ; ce que l'on savait puisque le coefficient a égal à 1 est positif.

Dans le cas contraire, lorsque le coefficient a d'une fonction polynomiale de degré 2 est négatif, les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

Les informations ci-dessous nous permettent de commencer à visualiser (certes d'une manière très approximative) la parabole.



3. Dérivation et étude de signe

Déterminons $f'(x)$ où f' est appelée fonction dérivée de la fonction f .

On a : $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Donc : $f'(x) = 2x - 5$.

Étudions le signe du nombre dérivé $f'(x)$ en fonction des valeurs de x .

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$2x - 5$	-	0	+

On observe que, si $x \leq \frac{5}{2}$, alors $f'(x) \leq 0$, sinon $f'(x) > 0$.

Autrement, en chaque point de la parabole d'abscisse inférieure ou égale à $\frac{5}{2}$, la pente de la parabole est négative ou nulle. La parabole descend.

En chaque point de la parabole d'abscisse supérieure à $\frac{5}{2}$, la pente de la parabole est positive. La parabole monte.

4. Variations de la fonction

Tableau de variation de f sur l'ensemble des réels

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

Sur le tableau de variation, on observe bien que les branches de la parabole sont dirigées vers le haut, comme mentionné précédemment.

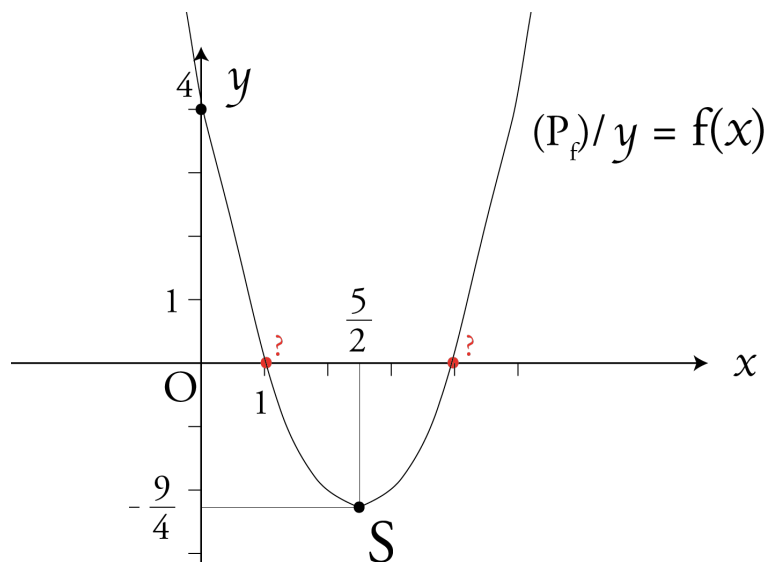
On observe en particulier que le point d'abscisse $\frac{5}{2}$ est le sommet S de la parabole.

Pour déterminer l'ordonnée du sommet, il convient de calculer $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$\text{On a : } f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{16}{4} = -\frac{9}{4}.$$

Le sommet S de la parabole a donc pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Nous pouvons ainsi affiner notre représentation de la parabole représentative de la fonction.



5. Zéros de la fonction

Les zéros de la fonction sont les valeurs pour lesquelles la fonction f s'annule, c'est-à-dire les racines du trinôme $x^2 - 5x + 4$ ou solution de l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Interprétés géométriquement, ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe (Ox) .

Considérons le trinôme $x^2 - 5x + 4$.

Calculons son discriminant Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(4) = 25 - 16 = 9 > 0.$$

Le trinôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

En résultats, les abscisses des deux points d'intersection de la parabole avec l'axe (Ox) sont respectivement 1 et 4.

Le tracé de la parabole peut ainsi être précisé, puis complété en déterminant les coordonnées, par exemple, des points d'abscisses -1 et 2, la symétrie de la parabole facilitant la construction de la courbe.