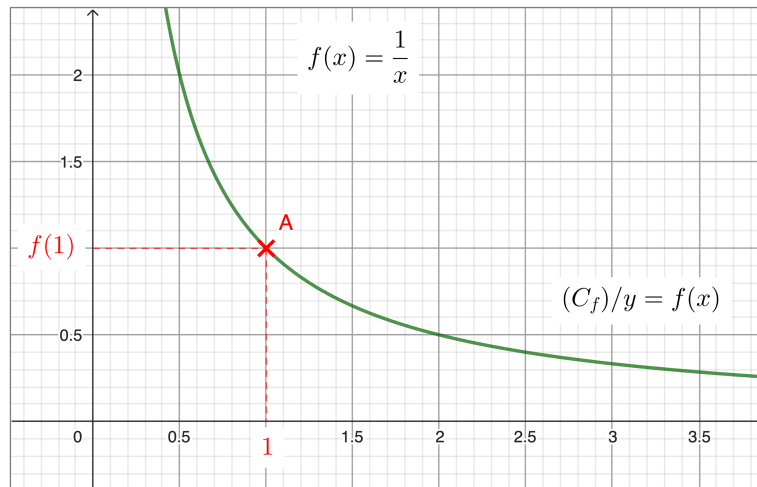


correction de l'exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Tracé de l'hyperbole représentative de la fonction f .



2. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre 1 et $1 + h$, $h \neq 0$.

$$\text{On a : } \tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ avec :}$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(1+h) = \frac{1}{1+h}$$

$$\text{D'où : } f(1+h) - f(1) = \frac{1}{1+h} - 1 = \frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h} = \frac{1-(1+h)}{1+h} = \frac{1-1-h}{1+h} = \frac{-h}{1+h}$$

$$\text{Donc : } \tau(h) = \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \frac{-h}{1+h} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{1+h}$$

3. Le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction f entre 1 et $1 + h$ tend vers -1 quand h tend vers 0.

$$\text{On écrit : } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+h} \right) = -1.$$

4. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$, $h \neq 0$.

$$\text{On a : } \tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$$f(a) = \frac{1}{a}$$

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h}$$

$$\text{D'où : } f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \frac{a-a-h}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$$

$$\text{Donc : } \tau(h) = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

5. Le taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et $a + h$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

On écrit : $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)} \right) = -\frac{1}{a^2}$

6. On note $f'(a)$ la valeur vers laquelle tend le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ lorsque h tend vers 0.

On a donc ici : $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Ce nombre est la pente de la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse a .

7. Déterminons la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

La pente est égale à : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

8. Déterminons la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

La pente est égale à : $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$